



**Dino Segura**

HACIENDO MATEMÁTICAS  
CARTILLA 4

# **¿QUÉ SON LOS FRACTALES?**

Complejidad y Caos

## LA RAZÓN DE SER DE ESTAS CARTILLAS

Luego de más de cuarenta años de titubear en torno a búsquedas pedagógicas, la Escuela Pedagógica Experimental ha logrado algunos resultados que creemos que vale la pena compartir con la comunidad. Definitivamente estamos convencidos de la importancia de unir esfuerzos para conseguir una escuela que realmente corresponda a nuestras posibilidades, a nuestra historia de realizaciones y a las capacidades que hemos mostrado los colombianos.

Son muchos los temas que podríamos incluir con estas intenciones. Unos relacionados con las disciplinas, otros con la pedagogía propiamente dicha y, en fin, muchos concernientes a las estrategias que hemos construido para convertir en realidad lo que podríamos denominar la *Pedagogía EPE*.

Por otra parte, los protagonistas de esta gesta hemos sido muchos. Por la EPE han transitado en estos 40 años más de 300 maestros, hemos graduado más de 1.000 bachilleres y recordémoslo, si la escuela existe, ello ha sido posible por que han existido los padres de familia, un grupo de colombianos que ha creído en nosotros, en la EPE, y que a través de las pensiones la ha mantenido viva, financiándola.

Lo que se hace entonces en el momento de escribir estas cartillas es sistematizar aspectos puntuales de la EPE, que tienen la impronta de quien lo hace. Habrá en el futuro diversas perspectivas de sistematización y entonces tendremos muchos planteamientos alternativos para las mismas experiencias. Tendremos muchas EPEs.

## LAS MATEMÁTICAS EN LA EPE

Una de las quejas que motivó la creación de la EPE era nuestro descontento por lo que la escuela tradicional hace con las disciplinas, concretamente al convertir el conocimiento en información.

Planteado eso, lo que quedaba como tarea era ingente: ¿Entonces qué hacer?

Fue entonces cuando iniciamos la exploración, el estudio y la práctica reflexiva en la escuela con los maestros y estudiantes.

Por el origen disciplinario de los fundadores lo que primero abocamos fue digamos la formación en matemáticas, ciencias y democracia. Hoy, aunque no todo está absolutamente claro, sí podemos avanzar un tanto y compartir lo que en líneas generales es la academia en la EPE.

La estructuración de la perspectiva de las matemáticas ha tenido la contribución de más de 50 maestros de la EPE. Si vamos al origen fueron tal vez las lecturas de J. Piaget, de S. Kuhn y de R. Harrè las que desde hace unos 40 años nos mostraron que el aprendizaje como una revolución o acomodación debe surgir de enfrentarse a conflictos y situaciones inesperadas. Ese modelo de aprendizaje lo expusimos formalmente en el libro *La enseñanza de la Física, dificultades y perspectivas (Segura D. 1993)*, publicado por el Fondo Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Hace unos quince años descubrimos que lo que hacíamos en la práctica era explorar las posibilidades de la abducción en la construcción disciplinaria. Es por ello que comenzamos con esa temática como lo central de estas cartillas. En realidad, fue la perspectiva abductiva lo que nos permitió estructurar la academia en torno de la creatividad, que nos llevó a una manera totalmente antagónica a lo que es la academia en nuestras escuelas usuales.

Lo que sucede es que mientras la escuela en el mundo está centrada en la difusión de los resultados de la actividad matemática o científica, esto es, en la repetición y memorización de resultados y algoritmos, nuestra propuesta enfatiza en transitar los procesos de construcción de las disciplinas recorriendo los procesos de elaboración de hipótesis y solución de problemas.

Nos interesa más el camino de producción del saber que los resultados desnudos que se obtienen.

**-4 -**

# **HACIENDO MATEMÁTICAS**

**¿Qué son los fractales?**

**-Complejidad y caos-**

**Dino Segura**

## ¿Qué son los fractales?

**“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta”<sup>1</sup>**

Cuando vamos por ahí nos encontramos con objetos (vivos y no vivos), unos son árboles, otros paisajes y aún, otros son mapas. Y, descubrimos en ellos formas extrañas que no se parecen mucho a las formas que estudiamos en la escuela, a los círculos y líneas rectas, a los conos y las esferas, a los pentágonos y poliedros ...

Parece que la geometría que nos enseñaron no es para este mundo, las formas que aprendimos son muy distintas de las que encontramos en el mundo.



Tomado de imgur.com. Fractal, cactus

Este mundo puede describirse tal vez con otra geometría:

**Para describir este mundo se requiere otra geometría, la geometría fractal, nos dice Mandelbrot.**

La geometría fractal es realmente reciente. Mientras la geometría que aprendimos en la escuela nos remite a Euclides, la geometría euclidiana (o platónica) de hace unos 2.200 años, la geometría fractal se comenzó a formalizar con B. Mandelbrot en los años 70,

**¡¡hace apenas unos 50 años!!**

---

<sup>1</sup> En la introducción de su libro “Geometría Fractal de la Naturaleza”, (publicado en 1982), el matemático [Benoit Mandelbrot](#), <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/definicion-de-fractal/>

## ¿Cómo se dio la cosa?

Por esos días, una de las preocupaciones fundamentales en la ciencia era el estudio de la auto-organización.

El asunto es este. En el siglo antepasado (hace unos 200 años) se pensaba que todo había estado en orden una vez, hace mucho tiempo, y que los fenómenos que se daban espontáneamente (por ejemplo, la caída de un cuerpo, el desprendimiento de una roca desde lo alto de la montaña o la ocurrencia de los huracanes) lo que hacían era utilizar ese orden (como energía) y desordenar un tanto el universo (aumentaba la entropía) y eso se había convertido en una ley, la segunda ley de la termodinámica..

Así pues,

**Cuando el universo se hubiese desordenado totalmente tendríamos la “muerte térmica” del universo. ¡Todo estaría quieto!**

Esto cambió radicalmente en el siglo pasado cuando se iniciaron muchos estudios acerca de la auto-organización, esto es, acerca de cómo puede surgir el orden a partir del caos.

Prigogine plantea el argumento que cuestiona la segunda ley de la termodinámica (pg 1, op cit.), así:



Sierpinsky, construcción en la EPE

***... Además, existe otro problema, ya que el aumento de entropía está normalmente asociado a un desorden creciente. ¿Cómo podría, entonces, un proceso de esas características producir estructuras complejas como la vida, en particular la vida humana?***

Es que definitivamente ¡el orden que encontramos en el mundo es sobrecogedor! Si no aceptamos que hubo un arquitecto universal, el demiurgo, responsable de haber ordenado el universo, es necesario explicar de dónde y cómo surge ese orden que encontramos. Preguntas acerca de ese orden podrían ser:

1. ¿Cómo se organizó ese infinito número de sistemas solares que hay en el universo?
2. ¿Cómo se organiza un ecosistema (y hay millones) con ese equilibrio dinámico que incluye seres vivos (presas y depredadores, por ejemplo), materia orgánica y materia inorgánica, como el agua y los minerales?
3. ¿Cómo se dio la organización de todo lo que conocemos, incluso la vida y las relaciones e interacciones exitosas de los seres vivos con su entorno?
4. Incluso los filósofos (Poincare, por ejemplo) se preguntan ¿de dónde surge el conocimiento, esto es, las generalizaciones que nos permiten luego, mediante deducciones explicarnos y transformar el mundo en que vivimos?



Fractales en la clase - EPE

Ahora bien, frente a esas inquietudes, ya tenemos algunas aproximaciones muy interesantes. De todas maneras, la auto-organización sigue siendo en la actualidad un tema de estudio fundamental.

Prigogine estudia precisamente la emergencia del orden para casos especiales relacionados con la vida y tratados como estructuras disipativas.

Varela y Maturana (1996) introducen el concepto de autopoyesis para explicar lo que es la vida a partir de una idea en forma de bucle, la vida es vida en cuanto se replica (se auto-replica).

Si no es posible explicar el nivel molecular a partir del nivel atómico, tenemos que considerar el mundo de las moléculas como un nivel de organización independiente ... (Atlan, 1991)

La auto-organización se estudia en las ciencias naturales y también en las ciencias sociales (De Landa, 2011, por ejemplo). ¡¡Ya todos hablamos de las emergencias!!

Al respecto, hay algunas cosas claras.

## Hay cosas un tanto claras: LA RECURRENCIA

Las interacciones de los seres vivos con su entorno son recurrentes. Y tal vez son recurrentes todos los procesos históricos ... Y por eso es importante estudiar las máquinas no triviales (Von Foester, 1996), en particular las instituciones sociales y las escuelas, como máquinas no triviales, son instituciones que aprenden.



Tomado de <https://es.gizmodo.com/>

El ser vivo interactúa con su entorno y ambos se transforman. Pero la cosa no termina allí, tanto el ser vivo como su entorno continúan interactuando y transformándose. Los resultados sucesivos de cada interacción son muy similares, casi idénticos.

Y eso se está dando permanentemente. Y

se seguirá dando mientras el ser vivo esté efectivamente vivo. Y como consecuencia de esta *recurrencia* tenemos que los seres vivos exhiben formas muy características como las espirales y las simetrías (Ver G. Bateson 2000) y los fractales de la naturaleza. Así pues, el pensamiento recurrente que es típicamente biológico nos ayuda a comprender no solo la organización de los seres vivos ... sino lo que encontramos en otros dominios en donde hay recurrencia. Hay un estudio interesante de las culturas mesoamericanas, publicado en la revista mexicana Desakatos (No 53 de 2017) en la que se intenta utilizar la concepción fractal para comprender cuestiones antropológicas.

## Y la recurrencia es un elemento característico de los fractales.

### Volvamos a las matemáticas

Con Mandelbrot apareció por primera vez la palabra fractal, pero esos estudios no comenzaron con él. Desde hace tiempo muchas personas habían estado trabajando en diferentes asuntos, que a la postre se convirtieron en complementarios a la hora de comprender los fractales.

Para los matemáticos es supremamente interesante que cuando ciertas operaciones se realizan repetidamente sobre sus propios resultados, aparecen sorprendentemente patrones inesperados.

Era algo que se sospechaba, que se intuía, pero solo fue evidente con el apareamiento de los computadores que hicieron posible hacer por ejemplo millones a operaciones sobre el resultado de la misma operación (recurrencias), y en tiempos muy cortos.

Las figuras que se obtienen como patrones en matemáticas (fractales matemáticos) y las imágenes que observamos en la naturaleza (fractales naturales) poseen ciertas características que son novedosas, atractivas y, cuando se estudian, muy relacionadas con la teoría de sistemas (por ejemplo, la relación entre la parte y el todo y las retroalimentaciones), que era una disciplina que se estaba desarrollando por la misma época.



Piso fragmentado. <https://es.gizmodo.com/>

## LO QUE APARECÍA, Y ERA SORPRENDENTE ERA QUE ...

1. La parte se semeja al todo (parece que en la parte está el todo).
2. Los patrones se generan mediante recurrencias
3. Su dimensión es fraccionaria.

Con Mandelbrot se da inicio al estudio sistemático de los fractales construidos por los matemáticos. Esos fractales son “perfectos” si se comparan con los que encontramos en la naturaleza. Es decir, la geometría fractal que surge de la observación e interacción con el entorno da lugar a una idealización en la



Tomado de Nápoles V y Parra, 2012).

generación de los fractales y tenemos entonces unos fractales que ya no están en la naturaleza, sino que surgen de la especulación del matemático con sus teorías (Bilsky, 2002).

**Como estos son unos fractales que podemos estudiar a nuestro antojo, los conocemos cada día mejor y, en cuanto más los conocemos, mejor comprendemos el mundo que nos rodea, porque conocemos mejor los fractales.**

Así, existirían tres fuentes para los fractales,

- (1) la observación de la naturaleza (hojas, árboles, flores, nubes, un piso fragmentado – ver figura),
- (2) la construcción manual mediante aproximaciones cuidadosas (triángulo de Sierpinsky, por ejemplo) y
- (3) la generación de fractales mediante el computador.



Entre los ejemplos del segundo tipo, consideremos los fractales que suelen construirse en el aula, el Triángulo de Sierpinsky y el Copo de Nieve en las figuras que siguen.

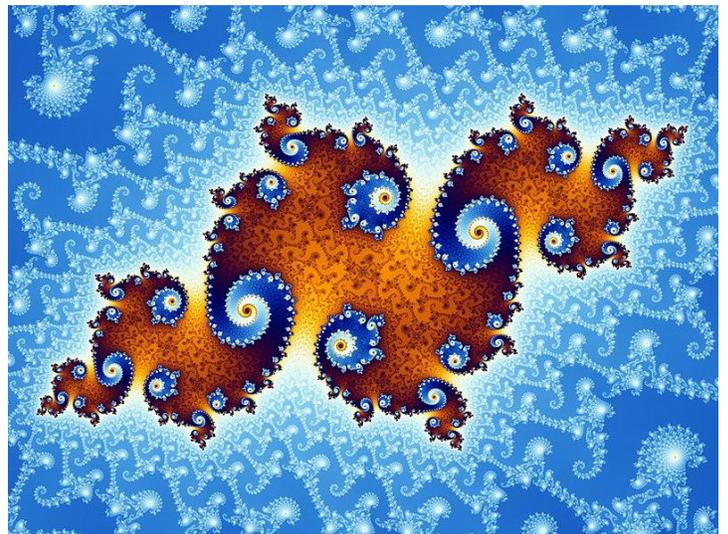
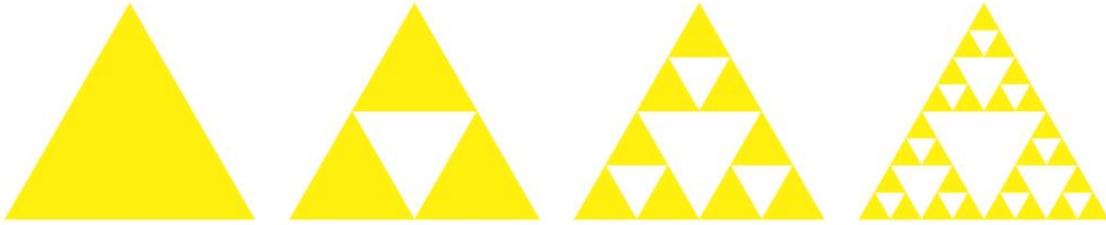


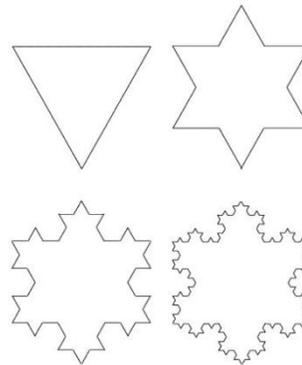
Figura de Mandelbrot . Fuente:  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/37/Mandel\\_zoom\\_14\\_satellite\\_julia\\_island.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/37/Mandel_zoom_14_satellite_julia_island.jpg)



Secuencia tomada de [divermates](http://divermates.es/blog/triangulo-sierpinski-kirigami/) <http://divermates.es/blog/triangulo-sierpinski-kirigami/> en Septiembre 9 de 2020. En este fractal, que sigue en su construcción hasta donde sea posible, teóricamente hasta el infinito; el perímetro tiende a infinito, mientras que el área tiende a cero.

Tomado de Del País  
[https://elpais.com/elpais/2018/01/18/ciencia/1516268907\\_244410.html](https://elpais.com/elpais/2018/01/18/ciencia/1516268907_244410.html).

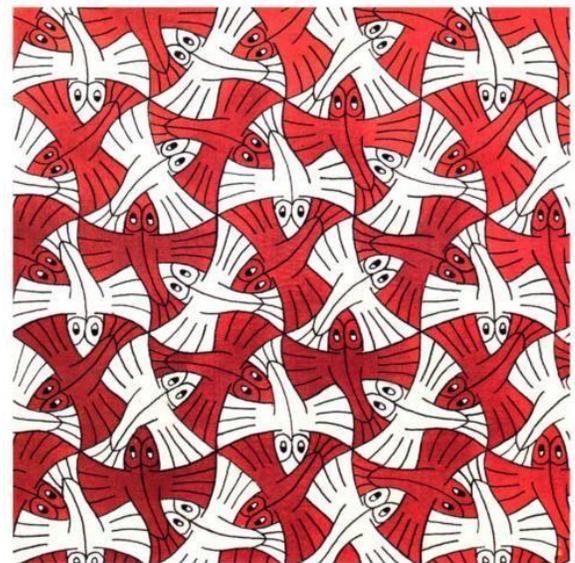
Construcción de el copo de nieve



### Otros trabajos que anticipaban a los fractales

Vale la pena mencionar aquí -y para mostrar también el espíritu de una época, los trabajos de Escher. A propósito, Nápoles y Parra, anotan:

*El artista plástico Maurits Cornelius Escher (1898-1972) es el que mejor ha reflejado gráficamente el pensamiento matemático moderno, intuyendo los fractales y su geometría ya que sin ser matemático, sus obras muestran un interés y una profunda comprensión de los conceptos geométricos, desde la perspectiva a los espacios curvos, pasando por la división del plano en figuras iguales. (Nápoles y Parra, 2012)*



Tomado de <https://www.pinterest.es/pin/174303448058289815/>, Septiembre 10 de 2020: Arte de peces

A proósito, las actividades con TESELACIONES, son ilustrativas y se convierten en un ejemplo muy interesante de la articulación del arte con las matemáticas. Los que siguen son ejemplos del trabajo con teselaciones en la EPE.

La construcción de cada teselación, que es absolutamente idiosincrásica se convierte en una fuente de orgullos individuales y grupales.

Con cada diseño se pueden elaborar objetos ya ea en cerámica o en telas que se convierten en distintivos.

## Bibliografía

Atlan, H. (1991) Con razón y sin ella. Intercrítica de la Ciencia y el Mito, Barcelona: Tusquets.

Bilski E. (S.F.). Características de los Fractales. Disponible en: <https://www.caracteristicass.de/fractales/> Consultado, Agosto 2020.

De Landa, Manuel (2011) Mil años de historia no lineal. Barcelona:Gedisa.

Von Foester, H. (1996) *Las semillas de la cibernética, obras escogidas*. Barcelona: Gedisa.

Harre, R. La lógica de las ciencias. Buenos Aires: Labor.

Juan E Nápoles Valdes Leonel L. Paloma Parra (2012). Fractales a nuestro alrededor VIDYA n 32 n 1 p 97 112 Santa Maria.

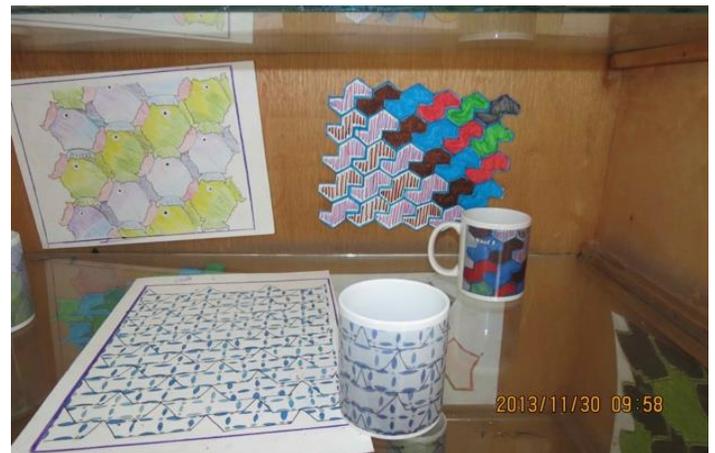
Hadehouve, Daniele. El fractal: ¿una noción útil para la antropología americanista? En Desacatos no.53 México ene./abr. versión On-line ISSN 2448-5144. Consultada. Agosto 2020.



Exposición d etrabajos – EPE 2013



Exposición de trabajos – EPE 2013



Exposición de trabajos – EPE 2013